

SÉRIE 4

15 mars 2017

Exercice 1. On jette un dé équilibré. Considérons l'ensemble fondamental $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, et la probabilité $\mathbb{P}(i) = 1/6, i \in \{1, \dots, 6\}$.

Définissons la variable aléatoire X : le chiffre qu'on a obtenu sur le dé, et la variable aléatoire Y :

$$Y = \begin{cases} 1 & \text{si on a obtenu un 6,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- (a) Décrivez les variables X et Y de la manière formelle, i.e. comme des fonctions de Ω dans \mathbb{R} .
- (b) Quel est l'ensemble H des valeurs prises pour la variable X ? Et pour Y ?
- (c) Donnez la fonction des fréquences pour la variable X . Faites de même pour Y .
- (d) Donnez la fonction de répartition pour la variable X . Faites de même pour Y .

Exercice 2. Est-ce que les fonctions suivantes peuvent être des fonctions de fréquences?

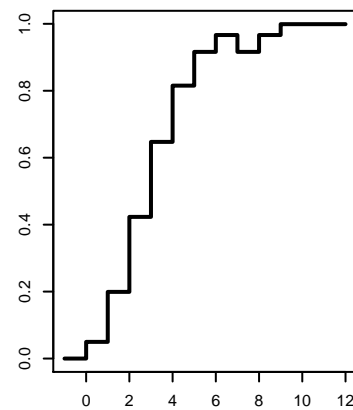
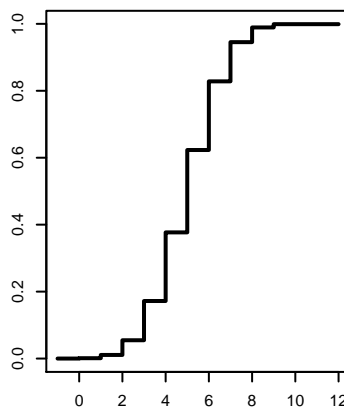
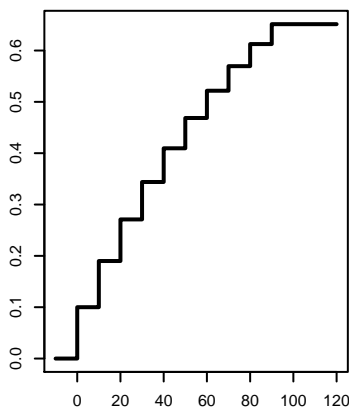
x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	0.25	0.25	0.25	0.25

x_i	0	1	2	3
$f(x_i)$	0.15	0.15	0.15	0.15

x_i	0	1	2	3	4	5
$f(x_i)$	0.03	0.16	0.31	0.31	0.16	0.03

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x_i)$	0.30	0.21	0.15	0.10	0.07	0.05	0.04	0.02	0.02	-0.01	0.03

Exercice 3. Est-ce que les fonctions suivantes peuvent être des fonctions de répartition?



Exercice 4. Quelle est la loi de la variable Y de l'exercice 1? Est-ce que c'est une des lois que vous avez vues en classe?

Exercice 5. La loi de la variable aléatoire X est donnée par $P(X = i) = c(1 - p)^i$ pour $i = 0, 1, 2, \dots$ et $0 < p < 1$.

- (a) Trouvez c .
- (b) Calculez $P(X = 0)$,
- (c) Calculez $P(X > 2)$.
- (d) Montrez que $P(X > m + n | X \geq n) = P(X > m)$ pour $m, n = 0, 1, \dots$

Indication : On peut utiliser le fait que $1 + u + u^2 + \dots + u^n = \frac{1 - u^{n+1}}{1 - u}$ si $u \neq 1$.

Exercice 6. Un système de communication est composé de n composants. Chaque composant fonctionne avec une probabilité p , et ce, indépendamment des autres.

- (a) Quelle est la loi de la variable aléatoire X qui donne le nombre de composants qui fonctionnent ? Est-ce que c'est une des lois que vous avez vues en classe ?
- (b) Le système fonctionne lorsqu'au moins la moitié des composants sont opérationnels. Pour quelles valeurs de p , un système à 5 composants a-t-il une plus grande probabilité de fonctionner qu'un système à 3 composants ?