Corrigé 11

Exercice 1. (a) Le modèle :

$$\begin{array}{ll} X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) & \text{pour chaque } i \in \{1, \ldots, 12\}, \\ X_1, \ldots, X_{12} & \text{sont indépendantes,} \\ \text{les paramètres } \mu \text{ et } \sigma^2 & \text{sont inconnus.} \end{array}$$

Les hypothèses nulle et alternative sont :

$$H_0 : \mu = 12.2, \quad H_1 : \mu \neq 12.2.$$

(b) Dans des situations similaires, on commence avec la statistique

$$T = \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n},$$

où μ_0 est la valeur spécifiée dans l'hypothèse, ici $\mu_0 = 12.2$.
On veut que la valeur de la statistique de test soit “petite” si H_0 est vraie, et “grande” si H_1 est vraie. On note que $\bar{X}_n$ est un estimateur de la vraie valeur μ. Donc si H_0 est vraie, on s'attend à ce que $\bar{X}_n \approx \mu_0$ et $T \approx 0$. Par contre, si H_1 est vraie, on s'attend à ce que $\bar{X}_n \approx \mu \neq \mu_0$ et $T >> 0$ ou $T << 0$. Si on utilise $|T|$ comme statistique de test, on peut s'attendre à des valeurs “petites” sous H_0 et des valeurs “grandes” sous H_1.

(c) Les valeurs de la statistique sont extrêmes quand $|T|$ est “trop grande”, ça veut dire quand $|T| > c$, où c est une valeur critique. Autrement dit, la valeur de la statistique de test est extrême quand $T < -c$ ou $T > c$.
Pour déterminer c, on se rappelle qu'on veut que la probabilité de l'erreur de type I soit égale à α (qui est une petite valeur). L'erreur de type I consiste à rejeter H_0 lorsque H_0 est vraie. Dans notre cas, on veut donc que

$$\alpha = \mathbb{P}_{H_0}(\{T < -c\} \cup \{T > c\}) = 1 - \mathbb{P}_{\mu=\mu_0}(-c \leq T \leq c). \tag{1}$$

On sait que

$$\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \sim t_{n-1}.$$

Si H_0 est vraie, $\mu = \mu_0$, et donc $T \sim t_{n-1}$. Donc, on peut satisfaire la condition (1) en choisissant $c = t_{n-1}(1 - \alpha/2)$.

(d) $\alpha = 0.05$, donc on rejette H_0 en faveur de H_1 si

$$\left| \sqrt{12}\,\frac{\bar{X}_n - 12.2}{S_n} \right| > t_{11}(0.975).$$

$$\sqrt{12}\,\frac{\bar{X}_n - 12.2}{S_n} = 2.002 \quad \text{et } t_{11}(0.975) = 2.20,$$

donc on ne rejette pas H_0 en faveur de H_1.
Attention ! Même si on n'a pas rejeté H_0, on ne dit pas qu'on l'accepte. Quand on fait un test statistique, on cherche une évidence contre H_0 en faveur de H_1. Quand on ne rejette pas H_0, cela veut simplement dire qu'il n'y a pas assez d'évidence contre cette hypothèse. Cela n'est pas la même chose que de montrer que H_0 est vraie !

(e) $\alpha = 0.10$, donc on rejette H_0 en faveur de H_1 si

$$\left|\sqrt{12}\,\frac{\bar{X}_n - 12.2}{S_n}\right| > t_{11}(0.95).$$

$$\sqrt{12}\,\frac{\bar{X}_n - 12.2}{S_n} = 2.002 \quad \text{et } t_{11}(0.975) = 1.80,$$

donc cette fois on rejette H_0 en faveur de H_1.
La seule différence avec la partie (d) est qu'ici on permet une plus grande erreur de type I. Avec une plus grande erreur de type I permise, "on a moins peur de rejeter". Autrement dit, on est satisfait avec moins d'évidence pour faire la décision contre H_0. Avec nos données, la différence entre 0.05 et 0.10 est assez grande pour changer la conclusion du test.

(f) Les intervalles de confiance à $(1-\alpha)\,\%$ qu'on a construit dans les parties (b) et (c) de l'exercice 2 de la série précédente, sont en fait les ensembles des valeurs μ_0 telles qu'on ne rejette pas l'hypothèse $H_0 : \mu = \mu_0$ en faveur de l'alternative $H_1 : \mu \neq \mu_0$ au niveau $\alpha\,\%$.

(g) La valeur p_{obs} est la probabilité d'obtenir la valeur de la statistique de test qu'on a observé ou une valeur encore plus extrême que celle-la, si H_0 est vraie. Dans notre cas, nous avons

$$p_{obs} = \mathbb{P}_{H_0}(\{T < -2.002\} \cup \{T > 2.002\}) = 1 - \mathbb{P}_{\mu=\mu_0}(-2.002 \leq T \leq 2.002).$$

Si H_0 est vraie, $T \sim t_{11}$, et donc

$$p_{obs} = 1 - \left(F_{t_{11}}(2.002) - F_{t_{11}}(-2.002)\right),$$

où $F_{t_{11}}$ est la fonction de répartition de la loi t_{11}. En utilisant la symétrie de cette loi autour de zéro (comme pour la loi $\mathrm{N}(0,1)$), on obtient que

$$p_{obs} = 2\left(1 - F_{t_{11}}(2.002)\right) = 2(1 - 0.9647) = 0.071.$$

Noter que la valeur $F_{t_{11}}(2.002)$ peut être trouvée en utilisant un logiciel statistique.

(h) $p_{obs} > 0.05$, donc on ne rejette pas H_0 en faveur de H_1 au niveau $5\,\%$, mais $p_{obs} < 0.10$, donc on rejette H_0 en faveur de H_1 au niveau $10\,\%$.
En fait, la valeur p_{obs} est le plus petit niveau auquel on rejette H_0 en faveur de H_1.

(i) (a) Le modèle :

$X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$	pour chaque $i \in \{1, \ldots, 12\}$,
$X_1, \ldots, X_{12}$	sont indépendantes,
les paramètres μ et σ^2	sont inconnus.

Les hypothèses nulle et alternative sont (par exemple) :

$$H_0 : \mu = 12.2, \quad H_1 : \mu < 12.2.$$

(b) On commence avec la statistique

$$T = \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu_0}{S_n},$$

où μ_0 est la valeur spécifiée dans l'hypothèse, ici $\mu_0 = 12.2$.

On veut que la valeur de la statistique de test soit "petite" si H_0 est vraie, et "grande" si H_1 est vraie. On note que $\bar{X}_n$ est un estimateur de la vraie valeur μ. Donc si H_0 est vraie, on s'attend à ce que $\bar{X}_n \approx \mu_0$ et $T \approx 0$. Par contre, si H_1 est vraie, on s'attend à ce que $\bar{X}_n \approx \mu < \mu_0$ et $T << 0$. Si on utilise $-T$ comme statistique de test, on peut s'attendre des valeurs "petites" sous H_0 et des valeurs "grandes" sous H_1.

(c) Les valeurs de la statistique sont extrêmes quand $-T$ est "trop grande", ça veut dire quand $-T > c$ (i.e. $T < -c$), où c est une valeur critique.

Pour déterminer c, on se rappelle qu'on veut que la probabilité de l'erreur de type I soit égale à α. Dans notre cas, on veut que

$$\alpha = \mathbb{P}_{\mu=\mu_0}(T < -c). \tag{2}$$

On sait que

$$\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu}{S_n} \sim t_{n-1}.$$

Si H_0 est vraie, $\mu = \mu_0$, et donc $T \sim t_{n-1}$. Donc, on peut satisfaire la condition (2) en choisissant $c = t_{n-1}(1-\alpha)$.

(d) $\alpha = 0.05$, donc on rejette H_0 en faveur de H_1 si

$$\sqrt{12}\,\frac{\bar{X}_n - 12.2}{S_n} < -t_{11}(0.95).$$

$$\sqrt{12}\,\frac{\bar{X}_n - 12.2}{S_n} = 2.002 \quad \text{et } t_{11}(0.95) = 1.80,$$

donc on ne rejette pas H_0 en faveur de H_1.

(e) $\alpha = 0.10$, donc on rejette H_0 en faveur de H_1 si

$$\sqrt{12}\,\frac{\bar{X}_n - 12.2}{S_n} < -t_{11}(0.90).$$

$$\sqrt{12}\,\frac{\bar{X}_n - 12.2}{S_n} = 2.002 \quad \text{et } t_{11}(0.90) = 1.36,$$

donc on ne rejette pas H_0 en faveur de H_1.

(f) L'intervalle de confiance unilatéral à $(1-\alpha)\,\%$ qu'on a construit dans la partie (e) de l'exercice 2 de la série précédente, est en fait l'ensemble des valeurs μ_0 telles que on ne rejet pas l'hypothèse $H_0 : \mu = \mu_0$ en faveur de l'alternative $H_1 : \mu < \mu_0$ au niveau $\alpha\,\%$.

(g) La valeur p_{obs} est la probabilité d'obtenir la valeur de la statistique de test qu'on a observé ou une valeur encore plus extrême que celle-la, si H_0 est vraie. Dans notre cas, nous avons

$$p_{obs} = \mathbb{P}_{\mu=\mu_0}(T < 2.002) = F_{t_{11}}(2.002) = 0.9647.$$

(h) $p_{obs} > 0.05$, donc on ne rejette pas H_0 en faveur de H_1 au niveau $5\,\%$; $p_{obs} > 0.10$, donc on ne rejette pas H_0 en faveur de H_1 au niveau $10\,\%$.

(j) Le modèle :

$$\begin{array}{ll} X_i \sim \mathrm{N}(\mu, \sigma^2) & \text{pour chaque } i \in \{1, \dots, 12\}, \\ X_1, \dots, X_{12} & \text{sont indépendantes,} \\ \text{les paramètres } \mu \text{ et } \sigma^2 & \text{sont inconnus.} \end{array}$$

Les hypothèses nulle et alternative sont :

$$H_0 : \mu = 14.5, \quad H_1 : \mu < 14.5.$$

On rejette H_0 en faveur de H_1 si

$$\sqrt{12}\,\frac{\bar{X}_n - 14.5}{S_n} < -t_{11}(0.95).$$

On a

$$\sqrt{12}\,\frac{\bar{X}_n - 14.5}{S_n} = -2.146 \quad \text{et } t_{11}(0.95) = 1.80,$$

donc on rejette H_0 en faveur de H_1 au niveau 5 %, et on peut dire que le nouveau modèle est plus efficace.

Exercice 2. On a observé les réponses de 800 personnes choisies au hasard. Pour la $i$ème personne, considérons une variable aléatoire

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si la personne choisie est en faveur de l'indépendance} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les variables $X_1, \dots, X_{800}$ sont iid Bernoulli(p) où $p \in (0, 1)$ est le vrai pourcentage qui va voter en faveur de l'indépendance.

Il faut tester $H_0 : p \leq 0.5$ contre $H_1 : p > 0.5$. On peut baser le test sur la différence entre l'estimateur $\bar{X}_{800}$ du paramètre p et sa valeur hypothétique 0.5. Le test rejette H_0, si la variable $\bar{X}_{800} - 0.5$ est significativement grande. Alors, on rejette H_0 quand $\bar{X}_{800} - 0.5 > c$ où c est une constante telle que la probabilité de rejet de H_0 est α quand H_0 est vérifiée, c'est-à-dire

$$P_{H_0}(\bar{X}_{800} - 0.5 > c) = \alpha.$$

Ceci est équivalent à

$$P_{p=0.5}(T > d) = \alpha$$

où

$$T = \frac{\bar{X}_{800} - 0.5}{\sqrt{0.5 \times (1 - 0.5)/800}}$$

et d est une autre constante (on pourrait exprimer d comme une fonction de c, mais il n'est pas nécessaire de le faire). Pour déterminer d on utilise le Théorème central limite et on approxime la distribution de T par la loi normale $\mathrm{N}(0, 1)$, ce qui donne

$$1 - \Phi(d) = \alpha.$$

On obtient donc $d = z(1 - \alpha)$. Donc le test rejette H_0 en faveur de H_1 quand $T > z(1 - \alpha)$, le niveau de ce test est approximativement α.

Dans notre cas, $\bar{x}_{800} = 0.55$, donc

$$t_{obs} = \frac{0.55 - 0.5}{\sqrt{0.5 \cdot 0.5/800}} = 2.83.$$

Si on choisit $\alpha = 0.05$, on compare t_{obs} avec $z(0.95) = 1.64$. Alors on rejette l'hypothèse H_0 en faveur de H_1, et on peut dire que, à un seuil de signification de 5 %, on a montré que la majorité de la population est favorable à l'indépendance du Québec. Vive le Québec libre !

Exercice 3. On suppose qu'on a deux échantillons indépendants (les variables de chaque échantillon indépendantes entre elles et les deux échantillons indépendants), $X_1, \ldots, X_6$ (les temps observés pour le premier groupe), et $Y_1, \ldots, Y_6$ (les temps observés pour le deuxième groupe), tels que $X_i \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma^2)$ et $Y_j \sim \mathrm{N}(\mu_Y, \sigma^2)$.
Noter que ces suppositions sont discutables. Par exemple, les variances estimées des deux échantillons, s_X^2 et s_Y^2, semblent être assez différentes. On fait ces suppositions ici quand même afin de pouvoir utiliser une statistique de test simple (la statistique donnée dans la formulaire). Il existe d'autres méthodes qui peuvent être utilisées lorsqu'on veut faire des suppositions différentes (par exemple moins restrictives).

L'hypothèse à tester est $H_0 : \mu_X = \mu_Y$ contre l'alternative $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$. Autrement dit, on veut tester $H_0 : \mu_X - \mu_Y = 0$ contre $H_1 : \mu_X - \mu_Y \neq 0$.

On peut baser le test sur la différence entre $\bar{X}_6$ (l'estimateur de μ_X) et $\bar{Y}_6$ (l'estimateur de μ_Y). Si H_0 est vraie, on s'attend à ce que $\bar{X}_6 \approx \bar{Y}_6$, et si H_1 est vraie, on s'attend à ce que $|\bar{X}_6 - \bar{Y}_6| >> 0$. Donc on va rejeter H_0 en faveur de H_1 si $|\bar{X}_6 - \bar{Y}_6| > c$. Ceci est équivalent à $|T| > d$, où

$$T = \sqrt{6+6-2} \times \sqrt{\frac{6 \times 6}{6+6}} \times \frac{\bar{X}_6 - \bar{Y}_6}{\sqrt{5 \times S_X^2 + 5 \times S_Y^2}}.$$

Si H_0 est vraie, $\mu_X = \mu_Y$ et $T \sim t_{6+6-2}$. Donc on peut choisir $d = t_{10}(1 - \alpha/2)$. Choisissons encore $\alpha = 0.05$.

Nous avons $\bar{x}_6 = 2.95$, $\bar{y}_6 = 3.82$, $s_x^2 = 0.094$, et $s_y^2 = 0.478$, donc

$$t_{obs} = \sqrt{10} \times \sqrt{\frac{36}{12}} \times \frac{2.95 - 3.82}{\sqrt{5 \times 0.094 + 5 \times 0.478}} = -2.81,$$

et $t_{10}(0.975) = 2.228$. Donc, on rejette l'hypothèse H_0 en faveur de H_1 au niveau de 5 %.

Exercice 4. La situation paraît assez similaire à celle de l'exercice 3. On a deux échantillons, $X_1, \ldots, X_{10}$ (les temps observés pour le soporifique A), et $Y_1, \ldots, Y_{10}$ (les temps observés pour le soporifique B), et on suppose $X_i \sim \mathrm{N}(\mu_X, \sigma_X^2)$ et $Y_j \sim \mathrm{N}(\mu_Y, \sigma_Y^2)$. Les variables X_i peuvent être supposées indépendantes entre elles, et les variables Y_j peuvent être supposées indépendantes entre elles. Mais il y a une importante différence ! On ne peut pas supposer que les variables X_i sont indépendantes des variables Y_i, parce que les médicaments ont été administrés aux mêmes personnes. Cela va changer la statistique de test qu'on va utiliser.

Pour obtenir une statistique de test, on peut utiliser que la différence de deux variables normales, $V_1 \sim \mathrm{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $V_2 \sim \mathrm{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ est un variable normale $V_1 - V_2 \sim \mathrm{N}(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\,\mathrm{Cov}(V_1, V_2))$. Dans notre cas, à la place de deux échantillons, $X_1, \ldots, X_{10}$ et $Y_1, \ldots, Y_{10}$, on peut considérer un échantillon $Z_1, \ldots, Z_{10}$, où $Z_i = X_i - Y_i$ pour $i \in \{1, \ldots, 10\}$.

Les variables Z_i peuvent être supposées indépendantes et normales, $Z_i \sim \mathrm{N}(\mu_X - \mu_Y, \sigma^2)$. Maintenant on peut procéder comme dans l'exercice 1.

On va tester l'hypothèse $H_0 : \mu_Y = \mu_X + 3$ contre l'hypothèse alternative $H_1 : \mu_Y \neq \mu_X + 3$. Autrement dit, $H_0 : \mu_X - \mu_Y = -3$ et $H_1 : \mu_X - \mu_Y \neq -3$. On va utiliser la statistique de test $|T|$ où

$$T = \sqrt{10}\,\frac{\bar{Z}_n + 3}{S_Z},$$

et on va rejeter H_0 en faveur de H_1 si $t_{obs} > t_9(1 - \alpha/2)$.

Dans notre cas, on a

$$\begin{aligned}
\bar{z}_{10} &= \bar{x}_{10} - \bar{y}_{10} = 0.75 - 2.19 = -1.44, \\
s_z^2 &= s_x^2 + s_y^2 - 2s_{xy}^2 = 3.20 + 4.63 - 2 \times 3.11 = 1.61, \text{ et} \\
t_{obs} &= \sqrt{10}\,\frac{3 - 1.44}{\sqrt{1.61}} = 3.9.
\end{aligned}$$

Si on choisit $\alpha = 0.05$, on compare t_{obs} avec $t_9(0.975) = 2.262$, et on rejette H_0 en faveur de H_1. Donc, au niveau $5\,\%$, on a montré que l'effet du soporifique B n'a pas la moyenne de 3 heures de plus que le soporifique A.