Corrigé 5

Exercice 1. La dernière, car les deux autres fonctions ne satisfont pas la condition $\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Il s'agit de la loi uniforme $\mathrm{U}(0,1)$.

Exercice 2. (a)

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 3/x^4 & \text{pour } x \geq 1, \\ 0 & \text{pour } x < 1. \end{cases}$$

(b) $f(x) = F'(x) = \mathrm{e}^{-x}/(1+\mathrm{e}^{-x})^2$ pour $x \in \mathbb{R}$.

(c)

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} \frac{(\alpha+\beta-1)!}{(\alpha-1)!\,(\beta-1)!}\, x^{\alpha-1}\,(1-x)^{\beta-1} & \text{pour } x \in (0,1), \\ 0 & \text{pour } x \notin (0,1). \end{cases}$$

Exercice 3. (a)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi\,(1+t^2)}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\arctan x + \frac{1}{2} \qquad \text{pour } x \in \mathbb{R}.$$

(b)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0 & \text{pour } x \leq 0, \\ \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} k\,t^{k-1}\mathrm{e}^{-t^k}\,\mathrm{d}t = 1 - \mathrm{e}^{-x^k} & \text{pour } x \geq 0. \end{cases}$$

(c)

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0 & \text{pour } x \leq 0, \\ \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} 4\,t^3\,\mathrm{d}t = x^4 & \text{pour } x \in [0,1], \\ \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} 4\,t^3\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 1 & \text{pour } x \geq 1. \end{cases}$$

Exercice 4.

— Le premier et le dernier graphique représentent des fonctions de répartition de lois discrètes.
— Le deuxième et le troisième représentent des fonctions de répartition de lois continues.
— Le quatrième graphique représente une fonction de répartition d'une loi qui est ni discrète, ni continue (c'est en fait une loi mixte).
— La fonction représentée sur le cinquième graphique n'est pas une fonction de répartition, car elle n'est pas croissante.

La fonction de répartition correspondant à la densité de l'exercice 1 est la troisième fonction de répartition de cet exercice.

Exercice 5. (a) On sait que

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{\infty} c\,x^{-4}\,\mathrm{d}x = 0 + c\left[-\frac{1}{3\,x^3}\right]_1^{\infty} = \frac{c}{3}.$$

Donc $c = 3$.

(b) La loi est la même que dans la partie (a) de l'exercice 2.

(c)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X<1) &= \int_{-\infty}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}x = 0.\\
\mathbb{P}(X>1) &= \int_{1}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{\infty} 3\,x^{-4}\,\mathrm{d}x = 1.\\
\mathbb{P}(1<X\le 2) &= \int_{1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{2} 3\,x^{-4}\,\mathrm{d}x = 1-\frac{1}{8} = \frac{7}{8}.\\
\mathbb{P}(X\le 2) &= \int_{-\infty}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{2} 3\,x^{-4}\,\mathrm{d}x = \frac{7}{8}.\\
\mathbb{P}(0<X\le 3) &= \int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{1} 0\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{3} 3\,x^{-4}\,\mathrm{d}x = 1-\frac{1}{27} = \frac{26}{27}.
\end{aligned}$$

(d) Selon la définition de la probabilité conditionnelle, on a

$$\mathbb{P}(X>2\,|\,X<3) = \frac{\mathbb{P}(2<X<3)}{\mathbb{P}(X<3)} = \frac{\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_{-\infty}^3 f(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{\int_2^3 3\,x^{-4}\,\mathrm{d}x}{\int_1^3 3\,x^{-4}\,\mathrm{d}x} = \frac{1/8-1/27}{1-1/27} = \frac{19}{208}.$$

Exercice 6. (a) Il s'agit de la loi exponentielle exp(1/10).

(b)

$$\mathbb{P}(X>10) = \int_{10}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{10}^{\infty} \frac{1}{10}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{10}}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\frac{x}{10}}\right]_{10}^{\infty} = e^{-1}.$$

(c)

$$\mathbb{P}(X\ge 12\,|\,X\ge 2) = \frac{\mathbb{P}(X\ge 12\,\&\,X\ge 2)}{\mathbb{P}(X\ge 2)} = \frac{\mathbb{P}(X\ge 12)}{\mathbb{P}(X\ge 2)} = \frac{\int_{12}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_{2}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{e^{-12/10}}{e^{-2/10}} = \mathrm{e}^{-1}.$$

(d) La probabilité d'attendre encore au moins 10 ans sachant qu'on a déjà attendu 2 ans est la même que la probabilité d'attendre au moins 10 ans. On voit facilement qu'on obtient le même résultat pour chaque nombre t à la place de 2 et chaque nombre $t+s$ à la place de 12 (on prend bien sûr $t,s>0$).

La loi exponentielle est donc "sans mémoire". En fait, la loi exponentielle est la seule loi continue qui est "sans mémoire", tandis que la loi géométrique est la seule loi discrète qui est "sans mémoire".