

CORRIGÉ 7

Exercice 1. (a) Il s'agit d'une variable discrète, et pour une variable discrète on a

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{x_i} (x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i)),$$

où les x_i sont toutes les valeurs que X peut prendre. Une variable Bernoulli peut prendre les valeurs 0 et 1, et $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$ tandis que $\mathbb{P}(X = 1) = p$. On obtient donc

$$\mathbb{E}[X] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p.$$

Pour calculer la variance on utilise la formule

$$\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2.$$

Pour une variable discrète on a

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{x_i} (x_i^2 \cdot \mathbb{P}(X = x_i)),$$

donc

$$\mathbb{E}[X^2] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p, \quad \text{et} \quad \text{Var}[X] = p - p^2 = p(1 - p).$$

(b) Il s'agit d'une variable continue, et pour une variable continue on a

$$\mathbb{E}[Y] = \int_{\mathbb{R}} y \cdot f(y) \, dy,$$

où f est la densité de Y . Ici

$$\mathbb{E}[Y] = \int_0^1 5y^5 \, dy = \left[\frac{5}{6} y^6 \right]_0^1 = \frac{5}{6}.$$

Pour calculer la variance on utilise la formule

$$\text{Var}[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[Y])^2.$$

Pour une variable continue on a

$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_{\mathbb{R}} y^2 \cdot f(y) \, dy,$$

donc

$$\mathbb{E}[Y^2] = \int_0^1 5y^6 \, dy = \left[\frac{5}{7} y^7 \right]_0^1 = \frac{5}{7}, \quad \text{et} \quad \text{Var}[Y] = \frac{5}{7} - \frac{25}{36} = \frac{5}{252}.$$

(c) Il s'agit d'une variable discrète, donc

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{z_i} z_i \cdot \mathbb{P}(Z = z_i) = \sum_{i=1}^6 i \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^6 i = \frac{1}{6} \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} = \frac{7}{2},$$

$$\mathbb{E}[Z^2] = \sum_{z_i} z_i^2 \cdot \mathbb{P}(Z = z_i) = \sum_{i=1}^6 i^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \cdot \sum_{i=1}^6 i^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{2 \cdot 6^3 + 3 \cdot 6^2 + 6}{6} = \frac{91}{6},$$

$$\text{Var}[Z] = \mathbb{E}[Z^2] - (\mathbb{E}[Z])^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}.$$

(d) Il s'agit d'une variable continue de densité $f(w) = F'(w) = 4w^{-5}$ si $w > 1$, et $f(w) = 0$ sinon. Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[W] &= \int_{\mathbb{R}} w \cdot f(w) \, dw = \int_1^{\infty} 4w^{-4} \, dw = \left[-\frac{4}{3} w^{-3} \right]_1^{\infty} = \frac{4}{3}, \\ \mathbb{E}[W^2] &= \int_{\mathbb{R}} w^2 \cdot f(w) \, dw = \int_1^{\infty} 4w^{-3} \, dw = \left[-\frac{4}{2} w^{-2} \right]_1^{\infty} = 2, \\ \text{Var}[W] &= \mathbb{E}[W^2] - (\mathbb{E}[W])^2 = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}.\end{aligned}$$

Exercice 2. X est une variable exponentielle. Il s'agit d'une variable continue, et pour une variable continue on a

$$\mathbb{E}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x) \, dx,$$

où $f(x)$ est la densité de X et $g(x)$ est une fonction. En utilisant que $\lambda > 2$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^X] &= \int_0^{\infty} e^x \cdot \lambda e^{-\lambda x} \, dx = \lambda \cdot \int_0^{\infty} e^{-(\lambda-1)x} \, dx = \left[-\frac{\lambda}{\lambda-1} e^{-(\lambda-1)x} \right]_0^{\infty} = \frac{\lambda}{\lambda-1}, \\ \mathbb{E}[(e^X)^2] &= \mathbb{E}[e^{2X}] = \int_0^{\infty} e^{2x} \cdot \lambda e^{-\lambda x} \, dx = \lambda \cdot \int_0^{\infty} e^{-(\lambda-2)x} \, dx = \left[-\frac{\lambda}{\lambda-2} e^{-(\lambda-2)x} \right]_0^{\infty} = \frac{\lambda}{\lambda-2}, \\ \text{Var}[e^X] &= \mathbb{E}(e^X)^2 - (\mathbb{E}e^X)^2 = \frac{\lambda}{\lambda-2} - \frac{\lambda^2}{(\lambda-1)^2}.\end{aligned}$$

Exercice 3. X est une variable Poisson. Il s'agit d'une variable discrète, et pour une variable discrète on a

$$\mathbb{E}[g(X)] = \sum_{x_i} g(x_i) \mathbb{P}(X = x_i),$$

où les x_i sont toutes les valeurs que X peut prendre et $g(x)$ est une fonction.

Donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = e^{-\lambda} \lambda \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} = \lambda, \\ \mathbb{E}[X(X-1)] &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-2)!} = e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = e^{-\lambda} \lambda^2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} = \lambda^2, \\ \text{Var}[X] &= \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}X - (\mathbb{E}X)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.\end{aligned}$$

Exercice 4. Les densités sont dans l'ordre : Beta(4, 4), Beta(0.5, 0.5), Beta(6, 2), et Beta(1, 1).

Exercice 5. (a) La loi conjointe est

		X					
		1	2	3	4	5	6
Y	0	1/36	3/36	5/36	7/36	0	0
	1	0	0	0	0	8/36	8/36
	2	0	0	0	0	1/36	3/36

Toutes les probabilités sont entre 0 et 1, et en les sommant on obtient 1. Il s'agit bien d'une loi conjointe.

En sommant les probabilités dans chacune des lignes du tableau on obtient la loi marginale de Y , et en sommant dans les colonnes on obtient la loi marginale de X .

(b) Non. Pour qu'elles le soient, il faut que $\mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) = \mathbb{P}(X = x_i)\mathbb{P}(Y = y_j)$ pour chaque i, j . Or $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) \neq \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1)$.

(c) Selon la définition,

$$\mathbb{P}(X = x_i | Y = 1) = \frac{\mathbb{P}(X = x_i, Y = 1)}{\mathbb{P}(Y = 1)}.$$

On obtient la loi conditionnelle

$$\frac{x_i}{f(x_i | 1)} \mid \begin{array}{cc} 5 & 6 \\ 1/2 & 1/2 \end{array}.$$

(d) Selon la définition

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y].$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[XY] &= 0 \times \frac{1+3+5+7}{36} + 1 \times 5 \times \frac{8}{36} + 1 \times 6 \times \frac{8}{36} + 2 \times 5 \times \frac{1}{36} + 2 \times 6 \times \frac{3}{36} = \frac{134}{36}, \\ \mathbb{E}[X] &= 1 \times \frac{1}{36} + 2 \times \frac{3}{36} + 3 \times \frac{5}{36} + 4 \times \frac{7}{36} + 5 \times \frac{9}{36} + 6 \times \frac{11}{36} = \frac{161}{36}, \\ \mathbb{E}[Y] &= 0 \times \frac{16}{36} + 1 \times \frac{16}{36} + 2 \times \frac{4}{36} = \frac{24}{36}, \\ \text{cov}(X, Y) &= \frac{4824 - 161 \times 24}{1296} = \frac{20}{27}. \end{aligned}$$

Exercice 6. Les scatterplots sont (dans l'ordre) : $r = -0.7$, $r = 0$, $r = 0.5$.

Exercice 7. En utilisant la linéarité de l'espérance, on trouve

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_1] &= \frac{1}{2} (\mathbb{E}[Y_1] + 2\mathbb{E}[Y_2]) = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}, \\ \mathbb{E}[Z_2] &= \frac{1}{2} (\mathbb{E}[Y_2] - \mathbb{E}[Y_3]) = 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}, \\ \mathbb{E}[Z_3] &= \frac{1}{3} (\mathbb{E}[Y_1] + \mathbb{E}[Y_2] + \mathbb{E}[Y_3]) = \frac{1+2+3}{3} = 2. \end{aligned}$$

On sait que, étant donné deux variables indépendantes X et Y , on a $\text{Var}(aX + bY) = a^2 \text{Var} X + b^2 \text{Var} Y$.

$$\begin{aligned} \text{Var}[Z_1] &= \frac{1}{4} (\text{Var}[Y_1] + 4 \text{Var}[Y_2]) = \frac{1}{4} + 2 = \frac{9}{4}, \\ \text{Var}[Z_2] &= \frac{1}{4} (\text{Var}[Y_2] + \text{Var}[Y_3]) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}, \\ \text{Var}[Z_3] &= \frac{1}{9} (\text{Var}[Y_1] + \text{Var}[Y_2] + \text{Var}[Y_3]) = \frac{1+2+3}{9} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Calculons d'abord les covariances. Il est facile de vérifier que la covariance est un produit scalaire, c'est-à-dire que $\text{cov}(X + Y, Z) = \text{cov}(X, Z) + \text{cov}(Y, Z)$, $\text{cov}(aX, Y) = a \text{cov}(X, Y)$

et $\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X)$ où X, Y, Z sont des variables aléatoires, et a est une constante. On sait aussi que pour X et Y indépendantes, on a $\text{cov}(X, Y) = 0$. On trouve

$$\begin{aligned}\text{Cov}(Z_1, Z_2) &= \frac{1}{2} \text{Cov}(Y_2, Y_2) = \frac{1}{2} \text{Var}(Y_2) = 1, \\ \text{Cov}(Z_1, Z_3) &= \frac{1}{6} \text{Cov}(Y_1, Y_1) + \frac{1}{3} \text{Cov}(Y_2, Y_2) = \frac{5}{6}\end{aligned}$$

et

$$\text{Cov}(Z_2, Z_3) = -\frac{1}{6}.$$

La corrélation entre Z_i et Z_j est définie par

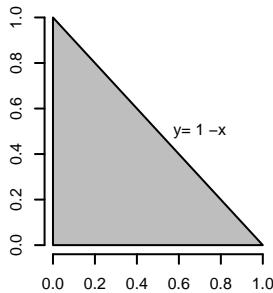
$$\text{Cor}(Z_i, Z_j) = \frac{\text{Cov}(Z_i, Z_j)}{\sqrt{\text{Var}[Z_i] \text{Var}[Z_j]}}.$$

Ainsi $\text{Cor}(Z_1, Z_2) = 4\sqrt{5}/15$, $\text{Cor}(Z_1, Z_3) = 5\sqrt{6}/18$ et $\text{Cor}(Z_2, Z_3) = -\sqrt{30}/30$.

Exercice 8. (a) On a bien $f(x, y) \geq 0$ pour tout x et y . De plus il faut que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

Dans notre cas l'ensemble $A = \{(x, y); f(x, y) > 0\}$ est un peu compliqué, donc il faut être prudent en spécifiant les bornes des deux intégrales. En fait, l'ensemble A est la



partie grise sur le dessin ci-dessus. Donc, on a $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-y} 24xy dx dy$.

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} 24xy dx dy = \int_0^1 24y \left(\int_0^{1-y} x dx \right) dy = \int_0^1 24y \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{1-y} dy = \int_0^1 12y(1-y)^2 dy = 1,$$

et on voit bien que $f(x, y)$ est une densité.

(b) La densité marginale de X est

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy.$$

De nouveau, il faut être prudent en spécifiant les bornes de l'intégrale. On a

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy = \int_0^{1-x} 24xy dy = 12x(1-x)^2 \quad \text{si } x \in [0, 1],$$

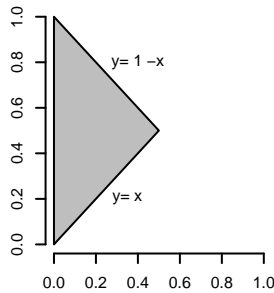
et $f_X(x) = 0$ sinon. Par symétrie on a également $f_Y(y) = 12y(1-y)^2$ si $y \in [0, 1]$ et $f_Y(y) = 0$ sinon.

(c) X et Y ne sont pas indépendantes car $f_X(x)f_Y(y) \neq f(x, y)$. En fait, on peut voir cela directement de la forme de A . Si la région $\{(x, y); f(x, y) > 0\}$ n'est pas rectangulaire, les deux variables ne peuvent pas être indépendantes.

(d)

$$\mathbb{P}(X < Y) = \int \int_{\{(x,y); x < y\}} f(x, y) dx dy.$$

Pour calculer cet intégrale on veut intégrer $24xy$ dans la région ci-dessous.



On obtient

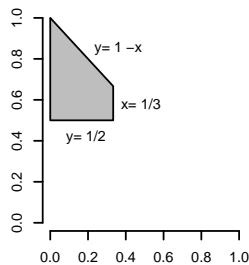
$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X < Y) &= \int_0^{1/2} \int_0^y 24xy dx dy + \int_{1/2}^1 \int_0^{1-y} 24xy dx dy \\ &= \int_0^{1/2} 24y \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^y dy + \int_{1/2}^1 24y \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{1-y} dy \\ &= \int_0^{1/2} 12y^3 dy + \int_{1/2}^1 12y(1-y)^2 dy \\ &= \frac{3}{16} + 6 - 8 + 3 - \frac{6}{4} + \frac{8}{8} - \frac{3}{16} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

ce qui peut être aussi deviné directement par la symétrie du problème.

(e) Selon la définition on a

$$\mathbb{P}(X < 1/3 | Y > 1/2) = \frac{\mathbb{P}(X < 1/3, Y > 1/2)}{\mathbb{P}(Y > 1/2)}.$$

Pour calculer $\mathbb{P}(X < 1/3, Y > 1/2)$ on intègre $24xy$ dans la région ci-dessous.



On a donc

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(X < 1/3, Y > 1/2) &= \int_{1/2}^{2/3} \int_0^{1/3} 24xy \, dx \, dy + \int_{2/3}^1 \int_0^{1-y} 24xy \, dx \, dy \\
 &= \int_{1/2}^{2/3} 24y \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{1/3} dy + \int_{2/3}^1 24y \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{1-y} dy \\
 &= \int_{1/2}^{2/3} \frac{12}{9} y \, dy + \int_{2/3}^1 12y(1-y)^2 \, dy \\
 &= \frac{8}{27} - \frac{1}{6} + 6 - 8 + 3 - \frac{24}{9} + \frac{64}{27} - \frac{48}{81} = \frac{13}{54}.
 \end{aligned}$$

De plus,

$$\mathbb{P}(Y > 1/2) = \int_{1/2}^1 12y(1-y)^2 \, dy = 6 - 8 + 3 - \frac{6}{4} + \frac{8}{8} - \frac{3}{16} = \frac{5}{16}.$$

Alors

$$\mathbb{P}(X < 1/3 | Y > 1/2) = \frac{13 \times 16}{5 \times 54}.$$

(f) Pour la densité conditionnelle de Y sachant $X = x \in (0, 1)$, on a

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)} = \frac{24xy}{12x(1-x)^2} = \frac{2y}{(1-x)^2}$$

pour $0 \leq y \leq 1-x$ et $f_{Y|X}(y|x) = 0$ autrement.

(g) On a

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 12x^2(1-x)^2 dx = 12 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} \right) = \frac{2}{5}.$$

De même $\mathbb{E}[Y] = \frac{2}{5}$ par symétrie. Finalement,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[XY] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y) \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^{1-y} 24x^2 y^2 \, dx \, dy \\
 &= \int_0^1 8(1-y)^3 y^2 \, dy \\
 &= \frac{8}{3} - 6 + \frac{24}{5} - \frac{4}{3} = \frac{2}{15}.
 \end{aligned}$$

Donc

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] = \frac{2}{15} - \frac{4}{25} = -\frac{2}{75}.$$