Intervalles de confiance bilatéraux pour un ou plusieurs échantillons (lois normales)

1. **Intervalle pour μ, σ^2 connu:** $T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

$$\left[\overline{X} - c_{1-\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + c_{1-\alpha/2}\,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

2. **Intervalle pour μ, σ^2 non connu:** $T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$ où $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$

$$\left[\overline{X} - t_{1-\alpha/2;n-1}\,\frac{s}{\sqrt{n}},\ \overline{X} + t_{1-\alpha/2;n-1}\,\frac{s}{\sqrt{n}}\right].$$

3. **Intervalle pour σ^2, μ connu:** $T = \dfrac{n\,s^2}{\sigma^2}$ où $s^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$

$$\left[\frac{n\,s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;n}},\ \frac{n\,s^2}{\chi^2_{\alpha/2;n}}\right].$$

4. **Intervalle pour σ^2, μ inconnu:** $T = \dfrac{(n-1)s^2}{\sigma^2}$ où $s^2 = \dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}\right)^2$

$$\left[\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;n-1}},\ \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2;n-1}}\right].$$

5. **Intervalle pour $\mu_1 - \mu_2$, σ_1^2 et σ_2^2 connus:** $T = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$

$$\left[\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - c_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}},\ \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + c_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}\right].$$

6. **Intervalle pour $\mu_1 - \mu_2$, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ non connus:** $T = \dfrac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$

où $s_p^2 = \dfrac{(n_1 - 1)s_1^2 + (n_2 - 1)s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$ et $s_i^2 = \dfrac{1}{n_i - 1}\sum_{j=1}^{n_j}\left(X_{ij} - \overline{X}_i\right)^2$

$$\left[\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - t_{1-\alpha/2;n_1+n_2-2}\, s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}},\quad \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + t_{1-\alpha/2;n_1+n_2-2}\, s_p\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}\right].$$

7. **Intervalle pour $\mu_1 - \mu_2$, $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ non connus:**

$$T = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}} \quad \text{où } s_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} \left(X_{ij} - \overline{X}_i\right)^2 .$$

$$\text{Posons } \nu = \frac{\left(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2\right)^2}{\frac{\left(s_1^2/n_1\right)^2}{n_1-1} + \frac{\left(s_2^2/n_2\right)^2}{n_2-1}} - 2$$

$$\left[\overline{X}_1 - \overline{X}_2 - t_{1-\alpha/2;\nu} \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}},\ \overline{X}_1 - \overline{X}_2 + t_{1-\alpha/2;\nu} \sqrt{\frac{s_2^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}\right].$$

8. **Intervalle pour $\mu_1 - \mu_2$ (cas apparié):** $T = \dfrac{\overline{D} - (\mu_1 - \mu_2)}{s_d/\sqrt{n}}$ où $D_i = X_{1i} - X_{2i}$ et $s_d^2 = \dfrac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(D_i - \overline{D}\right)^2$ et

$$\left[\overline{D} - t_{1-\alpha/2;n-1} \frac{s_d}{\sqrt{n}},\ \overline{D} + t_{1-\alpha/2;n-1} \frac{s_d}{\sqrt{n}}\right].$$

9. **Intervalle pour σ_2^2/σ_1^2, μ_1 et μ_2 inconnus:** $T = \dfrac{s_1^2/\sigma_1^2}{s_2^2/\sigma_2^2}$ où $s_i^2 = \dfrac{1}{n_i - 1} \sum_{j=1}^{n_i} \left(X_{ij} - \overline{X}_i\right)^2$

$$\left[\frac{s_2^2}{s_1^2} F_{\alpha/2;n_1-1;n_2-1},\ \frac{s_2^2}{s_1^2} F_{1-\alpha/2;n_1-1,n_2-1}\right].$$

10. **Intervalle pour p.** (Proportion $X_i \simeq b(1, p)$). En utilisant l'approximation normale

$$\left[\overline{X} - c_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}},\ \overline{X} + c_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\overline{X}(1-\overline{X})}{n}}\right].$$

Pour tous ces intervalles, on utilise la notation

$$\begin{aligned}
t_{1-\gamma;\nu} \quad & \text{si} \quad \int_{-\infty}^{t_{1-\gamma;\nu}} f(x)dx = 1 - \gamma \ \text{ où } f \text{ est la densité } t_\nu \\
\chi^2_{\gamma;\nu} \quad & \text{si} \quad \int_0^{\chi^2_{\gamma;\nu}} g(x)dx = \gamma \ \text{ où } g \text{ est la densité } \chi^2_\nu \\
F_{\gamma;\nu_1,\nu_2} \quad & \text{si} \quad \int_0^{F_{\gamma;\nu_1,\nu_2}} h(x)dx = \gamma \ \text{ où } h \text{ est la densité } F_{\nu_1,\nu_2} \\
c_\gamma \quad & \text{si} \quad \int_{-\infty}^{c_\gamma} \varphi(x)dx = \gamma \ \text{ où } \varphi \text{ est la densité } N(0,1).
\end{aligned}$$

H_0	Statistique	H_1	Région de rejet
$\mu = \mu_0$	$Z = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$; σ connu	$\mu < \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu \neq \mu_0$	$Z \leq c_\alpha$ $Z \geq c_{1-\alpha}$ $Z \leq c_{\alpha/2}$ et $Z \geq c_{1-\alpha/2}$
$\mu = \mu_0$	$T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$; σ inconnu	$\mu < \mu_0$ $\mu > \mu_0$ $\mu \neq \mu_0$	$T \leq t_{n-1;\,\alpha}$ $T \geq t_{n-1;\,1-\alpha}$ $T \leq t_{n-1;\,\alpha/2}$ et $T \geq t_{n-1;\,1-\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2 = d_0$	$Z = \dfrac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - d_0}{\sqrt{(\sigma_1^2/n_1) + (\sigma_2^2/n_2)}}$; σ_1 et σ_2 connus	$\mu_1 - \mu_2 < d_0$ $\mu_1 - \mu_2 > d_0$ $\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$Z \leq c_\alpha$ $Z \geq c_{1-\alpha}$ $Z \leq c_{\alpha/2}$ et $Z \geq c_{1-\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2 = d_0$	$T = \dfrac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - d_0}{S_p\sqrt{(1/n_1) + (1/n_2)}}$; $\sigma_1 = \sigma_2$ et inconnus, $S_p^2 = \dfrac{(n_1 - 1)\,S_1^2 + (n_2 - 1)\,S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$	$\mu_1 - \mu_2 < d_0$ $\mu_1 - \mu_2 > d_0$ $\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$T \leq t_{n_1+n_2-2;\,\alpha}$ $T \geq t_{n_1+n_2-2;\,1-\alpha}$ $T \leq t_{n_1+n_2-2;\,\alpha/2}$ et $T \geq t_{n_1+n_2-2;\,1-\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2 = d_0$	$T = \dfrac{\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) - d_0}{\sqrt{(S_1^2/n_1) + (S_2^2/n_2)}}$; $\nu = \dfrac{(S_1^2/n_1 + S_2^2/n_2)^2}{\frac{(S_1^2/n_1)^2}{n_1-1} + \frac{(S_2^2/n_2)^2}{n_2-1}}$; $\sigma_1 \neq \sigma_2$ et inconnus	$\mu_1 - \mu_2 < d_0$ $\mu_1 - \mu_2 > d_0$ $\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$T \leq t_{\nu;\,\alpha}$ $T \geq t_{\nu;\,1-\alpha}$ $T \leq t_{\nu;\,\alpha/2}$ et $T \geq t_{\nu;\,1-\alpha/2}$
$\mu_1 - \mu_2 = d_0$	$T = \dfrac{\overline{D} - d_0}{S_d/\sqrt{n}}$; observations appariées	$\mu_1 - \mu_2 < d_0$ $\mu_1 - \mu_2 > d_0$ $\mu_1 - \mu_2 \neq d_0$	$T \leq t_{n-1;\,\alpha}$ $T \geq t_{n-1;\,1-\alpha}$ $T \leq t_{n-1;\,\alpha/2}$ et $T \geq t_{n-1;\,1-\alpha/2}$
$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$X^2 = \dfrac{(n-1)\,S^2}{\sigma_0^2}$;	$\sigma^2 < \sigma_0^2$ $\sigma^2 > \sigma_0^2$ $\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$X^2 \leq \chi^2_{n-1;\,\alpha}$ $X^2 \geq \chi^2_{n-1;\,1-\alpha}$ $X^2 \leq \chi^2_{n-1;\,\alpha/2}$ et $X^2 \geq \chi^2_{n-1;\,1-\alpha/2}$
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$F = \dfrac{S_1^2}{S_2^2}$;	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 > \sigma_2^2$ $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$F \leq F_{n_1-1,\,n_2-1;\,\alpha}$ $F \geq F_{n_1-1,\,n_2-1;\,1-\alpha}$ $F \leq F_{n_1-1,\,n_2-1;\,\alpha/2}$ et $F \geq F_{n_1-1,\,n_2-1;\,1-\alpha/2}$

Relation

$$F_{\nu_1,\nu_2;\alpha} = \frac{1}{F_{\nu_2,\nu_1;1-\alpha}}.$$